Sumas de divisores

Lola Thompson

Oberlin College

17 de Agosto de 2018

La función $s(n)$

Definición

Sea $s(n)$ la suma de divisores propios de n.

Ejemplo: $s(p) = 1$ para cada primo p

Ejemplo: $s(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$

Podemos escribir $s(n) = \sigma(n) - n$, donde $\sigma(n)$ es la función de suma de divisores.

Números perfectos

Pitágoras observó:

$$s(\mathbf{6}) = 1 + 2 + 3 = \mathbf{6}.$$

Definición

n *sea* **perfecto** *si* $s(n) = n$.

Una fórmula para números perfectos pares

Teorema (Euclides)

Si $2^p - 1$ es primo, entonces $2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto.

Teorema (Euler)

Todos números perfectos pares son dados por la fórmula de Euclides.

¿Y qué de los números perfectos impares?

Sumas de divisores

Lola Thompson

Introducción
Números perfectos
Números amigos
Iteraciones de s

Interlude

La imagen de s

La preimagen de s

La heurística de Pomerance:

¿Y qué de los números perfectos impares?

La heurística de Pomerance:

- Vea el residuo $s(n) \pmod{n}$ como "aleatorio." Si n es perfecto entonces $s(n) \equiv 0 \pmod{n}$.

¿Y qué de los números perfectos impares?

La heurística de Pomerance:

- Vea el residuo $s(n) \pmod{n}$ como "aleatorio." Si n es perfecto entonces $s(n) \equiv 0 \pmod{n}$.
- Conocido desde Euler: un número perfecto impar n tiene que ser de la forma pm^2 donde p es un primo y $p \mid \sigma(m^2)$ $(= s(m^2) + m^2)$.

¿Y qué de los números perfectos impares?

La heurística de Pomerance:

- Vea el residuo $s(n) \pmod n$ como "aleatorio." Si n es perfecto entonces $s(n) \equiv 0 \pmod n$.
- Conocido desde Euler: un número perfecto impar n tiene que ser de la forma pm^2 donde p es un primo y $p \mid \sigma(m^2)$ $(= s(m^2) + m^2)$.
- Así, para m dado, hay a lo mas $O(\log m)$ posibilidades para p. Después de elegir uno de los p, tendremos $s(pm^2) \equiv 0 \pmod p$, entonces hay, en el mejor de los casos, una probabilidad de $1/m^2$ que pm^2 sea perfecto.

¿Y qué de los números perfectos impares?

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Números perfectos
Números amigos
Iteraciones de s
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s

La heurística de Pomerance:

- Vea el residuo $s(n) \pmod n$ como "aleatorio." Si n es perfecto entonces $s(n) \equiv 0 \pmod n$.
- Conocido desde Euler: un número perfecto impar n tiene que ser de la forma pm^2 donde p es un primo y $p \mid \sigma(m^2)$ $(= s(m^2) + m^2)$.
- Así, para m dado, hay a lo mas $O(\log m)$ posibilidades para p. Después de elegir uno de los p, tendremos $s(pm^2) \equiv 0 \pmod p$, entonces hay, en el mejor de los casos, una probabilidad de $1/m^2$ que pm^2 sea perfecto.
- Como $\sum (\log m)/m^2$ converge, debería haber a lo mas un número finito de números perfectos impares. Ahora bien, sabemos que no hay números perfectos impares pequeños; por lo tanto, es probable que no haya ninguno.

¿Cuantos números perfectos hay?

Sumas de divisores

Lola Thompson

Introducción
Números perfectos
Números amigos
Iteraciones de s

Interlude

La imagen de s

La preimagen de s

Teorema (Hornfeck & Wirsing, 1957)

El número de números perfectos $\leq x$ es $O(x^{\epsilon})$.

Números amigos

Definición

Si $s(\mathbf{n}) = \mathbf{m}$, $s(\mathbf{m}) = \mathbf{n}$, *y* $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$, *entonces* **n** *y* **m** *forman un* **par amigable**.

Ejemplo (Pitágoras):

$$s(\mathbf{220}) = \mathbf{284}, \quad s(\mathbf{284}) = \mathbf{220}.$$

¿Cuantos pares amigables son?

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Números perfectos
Números amigos
Iteraciones de s
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s

Sea $\mathcal{A}(x) := \#\{n, m \leq x : s(n) = m \text{ y } s(m) = n\}$

Erdős, 1955: $\mathcal{A}(x) = o(x)$ cuando $x \to \infty$.

Rieger, 1973: $\mathcal{A}(x) \leq x/(\log\log\log\log x)^{1/2}$, para x grande.

Erdős & Rieger, 1975: $\mathcal{A}(x) = O(x/\log\log\log x)$.

Pomerance, 1981: $\mathcal{A}(x) \leq x/\exp((\log x)^{1/3})$, para x grande.

Pomerance, 2014: $\mathcal{A}(x) \leq x/\exp((\log x)^{1/2})$, para x grande.

Estos dos últimos resultados implican (a través de un simple argumento de cálculo) que la suma de recíprocos de los números amigos converge.

Estimando la suma recíproca

Usando la lista de números amigos hasta 10^{14}, se puede mostrar que la suma de recíprocos A satisface

$$A > 0{,}0119841556...$$

Bayless & Klyve, 2011: $A < 656,000,000$

Nguyen, 2016: $A < 4084$

Iteraciones de s

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Números perfectos
Números amigos
Iteraciones de s
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s

Podemos ver s como un sistema dinámico, mirando sus iteraciones:

$6 \to 6$

$10 \to 8 \to 7 \to 1$

$12 \to 16 \to 15 \to 9 \to 4 \to 3 \to 1$

$28 \to 28$

$220 \to 284 \to 220$

$276 \to 396 \to \cdots$

Una secuencia de estas iteraciones de s se llama una *sucesión alícuota*.

Resultados sobre los iteraciónes de s

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Números perfectos
Números amigos
Iteraciones de s
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s

Conjetura Catalan-Dickson: Toda sucesión alícuota es acotada.

Contra-Conjetura Guy-Selfridge: La mayoría de los sucesiones alícuotas empezando desde un número par no son acotadas.

No se conocen sucesiones alícuotas ilimitadas, pero el primer candidato empieza con 276.

Evidencia computacional

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Números perfectos
Números amigos
Iteraciones de s
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s

Evidencia para Catalan-Dickson? Bosma ha investigado sucesiones alícuotas con números iniciales pares por debajo de 10^6. Aproximadamente $1/3$ de estos numeros iniciales dan lugar a sucesiones alícuotas que aún no han terminado (calculando hasta 10^{99}).

Evidencia para Guy-Selfridge? Bosma y Kane encontraron que la media geométrica asintótica de los cocientes $s(2n)/2n$ está ligeramente debajo de 1.

Sucesiónes alícuotas arbitrariamente largas

Teorema (Lenstra, 1975)

Hay sucesiones alícuotas crecientes arbitrariamente largas

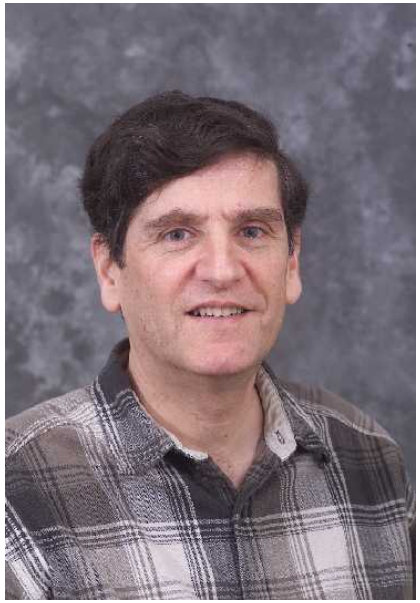
$$n < s(n) < s(s(n)) < \cdots < s_k(n).$$

Teorema (Erdős, 1976)

Para cada k fijo, si $n < s(n)$, la secuencia sigue creciendo por los siguientes $k-1$ pasos $(s(n) < s(s(n)) < \cdots < s_k(n))$ con probabilidad que tiende a 1.

Otros resultados sobre sucesiónes alícuotas

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Números perfectos
Números amigos
Iteraciones de s
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s



Teorema (Pomerance, 2016)

Asintóticamente, la media geométrica de los cocientes $s(s(2n))/s(2n)$ es lo mismo que para $s(2n)/2n$.

Citas divertidas

Agustín (400 CE): "Seis es un número perfecto de por sí, y no porque Dios creó todas las cosas en seis días; más bien, lo contrario es verdad. Dios creó todas las cosas en seis días porque el número es perfecto."

Citas divertidas

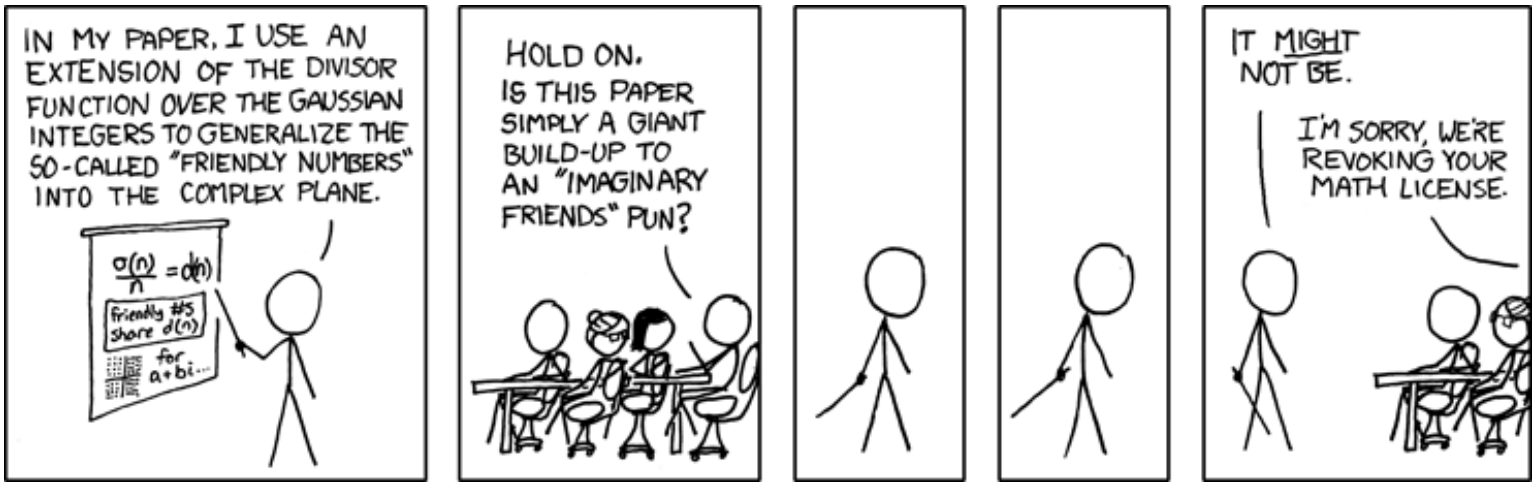
Pitágoras (Siglo VI BCE), sobre la definición de amigo: "Uno quien es el otro yo, como 220 y 284."

Citas divertidas

Al-Majriti (Siglo X CE): "He probado el efecto erótico... de dar a alguien el número más pequeño 220 a comer, y de comer yo mismo el número más grande 284."

Citas divertidas

Un ejemplo moderno (de XKCD):



"En mi artículo, uso una extensión de la función divisor sobre los enteros Gaussianos para generalizar los llamados 'números amigos' al plano complejo."

"Espere. ¿Es este articulo simplemente una larga preparación para un juego de palabras sobre 'amigos imaginarios'?"

"Puede que no lo sea."

"Lo siento, estamos revocando tu licencia de matemático."

Preguntas motivadoras

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
Citas divertidas
Preguntas motivadoras
La imagen de s
La preimagen de s

"Estudiar la comparación de $s(n)$ a n llevó a teoremas de Schoenberg, Davenport, y Erdős-Wintner, y al nacimiento de la teoría de números probabilística." -Carl Pomerance

En esta charla, nos concentraremos en dos preguntas particulares sobre la función $s(n)$:

1. ¿Cuales números son de la forma $s(n)$?
2. ¿Qué tan grande es el conjunto $s^{-1}(\{n\})$?

La imagen de s

Erdős fue el primero en considerar la imagen de s.

Enteros impares en el imagen de s

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s

Es fácil ver que casi todos los números impares están contenidos en la imagen de s:

Enteros impares en el imagen de s

Sumas de divisores

Lola Thompson

Introducción

Interlude

La imagen de s

La preimagen de s

Es fácil ver que casi todos los números impares están contenidos en la imagen de s:

Si p, q son primos con $p \neq q$, entonces $s(pq) = p + q + 1$.

Enteros impares en el imagen de s

Es fácil ver que casi todos los números impares están contenidos en la imagen de s:

Si p, q son primos con $p \neq q$, entonces $s(pq) = p + q + 1$.

La Conjetura Fuerte de Goldbach: Todos los enteros pares ≥ 8 son la suma de dos primos desiguales.

Enteros impares en el imagen de s

Es fácil ver que casi todos los números impares están contenidos en la imagen de s:

Si p, q son primos con $p \neq q$, entonces $s(pq) = p + q + 1$.

La Conjetura Fuerte de Goldbach: Todos los enteros pares ≥ 8 son la suma de dos primos desiguales.

Esto ha sido probado para todos, excepto un conjunto excepcional con densidad asintótica 0!

Enteros impares en el imagen de s

Es fácil ver que casi todos los números impares están contenidos en la imagen de s:

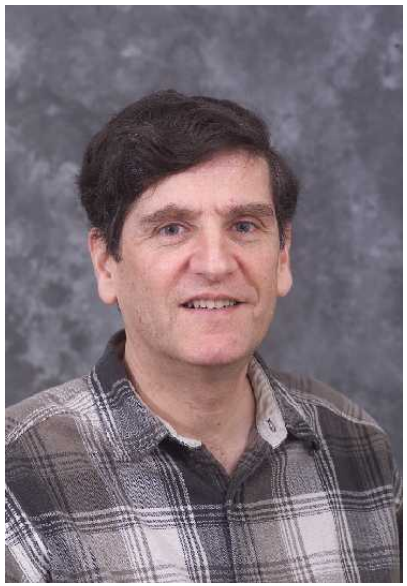
Si p, q son primos con $p \neq q$, entonces $s(pq) = p + q + 1$.

La Conjetura Fuerte de Goldbach: Todos los enteros pares ≥ 8 son la suma de dos primos desiguales.

Esto ha sido probado para todos, excepto un conjunto excepcional con densidad asintótica 0!

Así que casi todos los números impares ≥ 9 son valores de s.

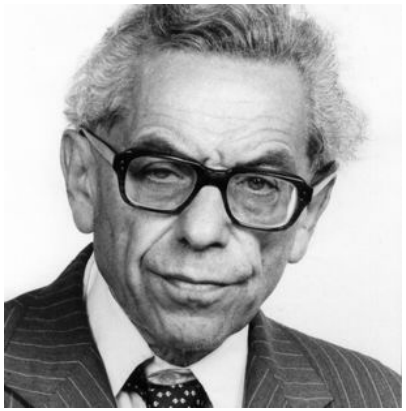
Enteros impares en el imagen de s

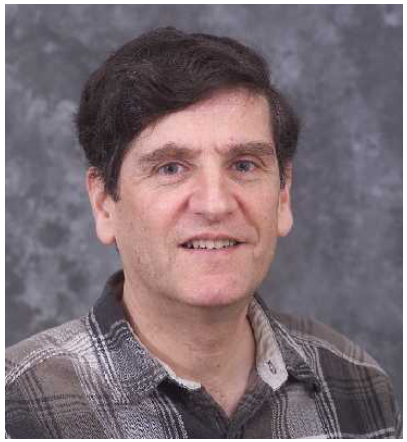


Teorema (Pomerance, 2016)

Para $n \leq x$ impar, $n > 1$, el número de $m \neq pq$ con $s(m) = n$ es $O(x^{3/4} \log x)$.

¿Y qué de los números pares?





Teorema (Erdős, 1973)

Una proporción positiva de los números pares no están en la imagen de s.

Teorema (Luca & Pomerance, 2014)

Una proporción positiva de los números pares están en la imagen de s.

La imagen de s

La función s puede enviar conjuntos de densidad asintótica 0 a conjuntos con densidad asintótica positiva.

Ejemplo Si $\mathcal{A} = \{pq : p, q \text{ primo}\}$ entonces $\mathcal{A}$ tiene densidad asintótica 0 pero $s(\mathcal{A})$ tiene densidad asintótica $1/2$.

Ejemplo Erdős construyó conjuntos $\mathcal{A}$ de densidad positiva tal que $s^{-1}(\mathcal{A})$ no sólo tiene densidad 0 si no que es, en realidad, vacío.

Sumas de divisores

Lola Thompson

Introducción

Interlude

La imagen de s

La preimagen de s

La conjetura EGPS

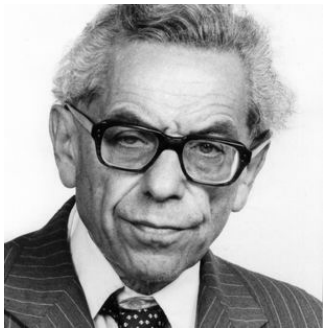
Progreso parcial en EGPS

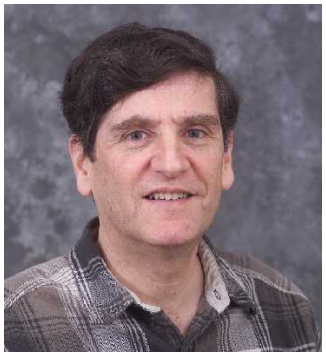
Una conjetura EGPS más fuerte?

La preimagen de s

Que se puede decir sobre $s^{-1}(\mathcal{A})$
cuando $\mathcal{A}$ tiene densidad asintótica 0?

La conjetura EGPS





Conjetura (Erdős, Granville, Pomerance, Spiro, 1990)

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto con densidad asintótica 0. Entonces $s^{-1}(\mathcal{A})$ también tiene densidad asintótica 0.

Consecuencias de EGPS

Algunas consecuencias de EGPS (si es verdad):

1. Para cada entero positivo fijo k, excepto por un conjunto de n con densidad 0, si $s(n) < n$ entonces $n > s(n) > s(s(n)) > \cdots > s_k(n)$ donde s_j es la iteración $j$ésima de s.

2. Para cada entero $k \geq 2$, hay un conjunto $\mathcal{A}_k$ de densidad asintótica 1 tal que

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathcal{A}_k}} \log(s_k(n)/s_{k-1}(n)) \to \beta,$$

cuando $x \to \infty$, donde β viene de un teorema de Bosma y Kane: $\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} \log(s(2n)/2n) \sim \beta$ cuando $x \to \infty$.

Special cases of EGPS

Algunos casos especiales de EGPS han sido probados:

- (Pollack, 2014) Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de primos, entonces

$$\#s^{-1}(\mathcal{A}) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Special cases of EGPS

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Algunos casos especiales de EGPS han sido probados:

- (Pollack, 2014) Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de primos, entonces

$$\#s^{-1}(\mathcal{A}) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

- (Troupe, 2015)
  Si $\mathcal{A}_\epsilon = \{m : |\omega(m) - \log\log m| > \epsilon \log\log m\}$ entonces $s^{-1}(\mathcal{A}_\epsilon)$ tiene densidad 0.

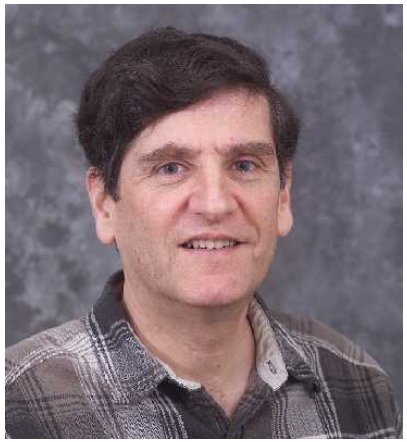
Special cases of EGPS

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Algunos casos especiales de EGPS han sido probados:

- (Pollack, 2014) Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de primos, entonces
$$\#s^{-1}(\mathcal{A}) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$
- (Troupe, 2015)
Si $\mathcal{A}_\epsilon = \{m : |\omega(m) - \log\log m| > \epsilon \log\log m\}$ entonces $s^{-1}(\mathcal{A}_\epsilon)$ tiene densidad 0.
- (Pollack, 2015) Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de palíndromos en cualquier base dada, entonces $s^{-1}(\mathcal{A})$ tiene densidad 0.

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?



Teorema (Pollack, Pomerance, T., 2018)

Sea $\epsilon \to 0$ cuando $x \to \infty$. Supongamos que A es un conjunto de a lo mas $x^{1/2+\epsilon}$ enteros positivos. Entonces, cuando $x \to \infty$,

$$\#\{n \leq x : s(n) \in \mathcal{A}\} = o_\epsilon(x)$$

uniformamente en $\mathcal{A}$.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Podemos suponer que $\epsilon \geq 1/\log\log x$.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de a lo mas $x^{1/2+\epsilon}$ enteros.

Cuando contamos los $n \leq x$ con $s(n) \in \mathcal{A}$, podemos descartar inmediatamente los n inconvenientes, incluyendo:

- $n \leq x^{1/2}$
- n sin factores primos $\leq \log x$
- n cuya parte "llena de cuadrados" $(\prod_{p^2|n} p^{v_p(n)})$ es $> x^{2\epsilon}$
- n con $\mathrm{mcd}(n, \sigma(n)) > \log x$
- n con algún divisor entre $x^{1/2-10\epsilon}$ y $x^{1/2+10\epsilon}$

(Bajo cada una de estas condiciones, nos deshacemos de $o(x)$ enteros.)

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Estrategia de la prueba:

1. Mostramos que para cada $a \in \mathcal{A}$, el número de $n \leq x$ restantes con $s(n) = a$ es $\leq x^{1/2-\epsilon}$.

2. Para $\#\mathcal{A} \leq x^{1/2+\epsilon}$, esta "cota puntual" del número de preimagenes es suficiente para completar la prueba que

$$\#\{n \leq x : s(n) \in \mathcal{A}\} = o(x).$$

¿De donde viene esta cota puntual?

Introducción

Interlude

La imagen de s

La preimagen de s

La conjetura EGPS

Progreso parcial en EGPS

Una conjetura EGPS más fuerte?

Escribimos $n = de$ donde d es el divisor de n más grande que no excede $\sqrt{x}$. Notamos que $e > 1$.

¿De donde viene esta cota puntual?

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Escribimos $n = de$ donde d es el divisor de n más grande que no excede $\sqrt{x}$. Notamos que $e > 1$.

Vamos a acotar el número de posibilidades para e, para un d dado, y luego sumaremos sobre d.

¿De donde viene esta cota puntual?

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Escribimos $n = de$ donde d es el divisor de n más grande que no excede $\sqrt{x}$. Notamos que $e > 1$.

Vamos a acotar el número de posibilidades para e, para un d dado, y luego sumaremos sobre d.

Nuestras suposiciones sobre n implican que

$$d < x^{1/2-10\epsilon}$$

pero también que

$$dP^-(e) > x^{1/2+10\epsilon}.$$

¿De donde viene esta cota puntual?

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Escribimos $n = de$ donde d es el divisor de n más grande que no excede $\sqrt{x}$. Notamos que $e > 1$.

Vamos a acotar el número de posibilidades para e, para un d dado, y luego sumaremos sobre d.

Nuestras suposiciones sobre n implican que

$$d < x^{1/2-10\epsilon}$$

pero también que

$$dP^-(e) > x^{1/2+10\epsilon}.$$

De estas desigualdades, podemos deducir (usando el hecho que la parte "llena de cuadrados" de n es pequeña) que $\mathrm{mcd}(d, e) = 1$.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores

Lola Thompson

Introducción

Interlude

La imagen de s

La preimagen de s

La conjetura EGPS

Progreso parcial en EGPS

Una conjetura EGPS más fuerte?

Ahora consideremos la ecuación

$$s(de) = a.$$

Bosquejo de la prueba

Ahora consideremos la ecuación

$$s(de) = a.$$

Usando la definición de s y la multiplicatividad de σ, una manipulación algebraica muy simple nos da que

$$\sigma(d)s(e) + s(d)e = a.$$

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Ahora consideremos la ecuación

$$s(de) = a.$$

Usando la definición de s y la multiplicatividad de σ, una manipulación algebraica muy simple nos da que

$$\sigma(d)s(e) + s(d)e = a.$$

Entonces, es suficiente acotar el número de posibilidades para $s(e)$, dado d, porque d y $s(e)$ determinan e, y por lo tanto determinan $n = de$.

Bosquejo de la prueba

Ahora consideremos la ecuación

$$s(de) = a.$$

Usando la definición de s y la multiplicatividad de σ, una manipulación algebraica muy simple nos da que

$$\sigma(d)s(e) + s(d)e = a.$$

Entonces, es suficiente acotar el número de posibilidades para $s(e)$, dado d, porque d y $s(e)$ determinan e, y por lo tanto determinan $n = de$.

Además, esta ecuación nos dice que

$$\sigma(d)s(e) \equiv a \pmod{s(d)}.$$

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Ahora consideremos la ecuación

$$s(de) = a.$$

Usando la definición de s y la multiplicatividad de σ, una manipulación algebraica muy simple nos da que

$$\sigma(d)s(e) + s(d)e = a.$$

Entonces, es suficiente acotar el número de posibilidades para $s(e)$, dado d, porque d y $s(e)$ determinan e, y por lo tanto determinan $n = de$.

Además, esta ecuación nos dice que

$$\sigma(d)s(e) \equiv a \pmod{s(d)}.$$

Dado d, esto pone $s(e)$ en una clase de residuo determinada de manera única módulo $s(d)/\mathrm{mcd}(s(d), \sigma(d))$.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

¿Donde estamos?

Dado d, queremos contar el número de posibilidades para $s(e)$. Sabemos que $s(e)$ está en una clase de residuo determinada de manera única módulo $s(d)/\mathrm{mcd}(s(d), \sigma(d))$.

Queremos una cota superior en $s(e)$. Una cota inferior es fácil: $s(e) \geq e/P^-(e)$.

La cota inferior no es tan útil, pero no es difícil mostrar que no está muy lejos de la verdad:

$$s(e) \ll \log x \cdot \frac{e}{P^-(e)}.$$

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Recordamos:

$$s(e) \ll \log x \cdot \frac{e}{P^-(e)}.$$

Por $de = n \leq x$, tenemos $e \leq x/d$, y así

$$s(e) \ll \log x \cdot \frac{x}{dP^-(e)}.$$

Recordamos que $dP^-(e) \geq x^{1/2+10\epsilon}$. Entonces

$$s(e) \ll \log x \cdot x^{1/2-10\epsilon}.$$

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Recapitulación: $s(e)$ está en una clase de residuo determinada de manera única módulo $s(d)/\mathrm{mcd}(s(d), \sigma(d))$ y $s(e) \ll \log x \cdot x^{1/2-10\epsilon}$. El número de posibilidades para $s(e)$, dado d, entonces es

$$\ll \log x \cdot x^{1/2-10\epsilon} \cdot \frac{\mathrm{mcd}(s(d), \sigma(d))}{s(d)} + 1.$$

Tenemos $s(d) \geq d/P^-(d) \geq d/\log x$.

También, $\mathrm{mcd}(s(d), \sigma(d)) = \mathrm{mcd}(d, \sigma(d))$, y esto divide a $\mathrm{mcd}(n, \sigma(n))$. Por lo tanto, $\mathrm{mcd}(s(d), \sigma(d)) \leq \log x$. Entonces nuestra cota superior es

$$\ll (\log x)^3 \cdot x^{1/2-10\epsilon}/d + 1.$$

Sumando para $d \leq x^{1/2-10\epsilon}$, obtenemos la cota superior que deseamos.

Consecuencias

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Consecuencias inmediatas de nuestro resultado:

Consecuencias

Consecuencias inmediatas de nuestro resultado:

- Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de palíndromos en cualquier base dada, entonces $s^{-1}(\mathcal{A})$ tiene densidad 0.

Consecuencias

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Consecuencias inmediatas de nuestro resultado:

- Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de palíndromos en cualquier base dada, entonces $s^{-1}(\mathcal{A})$ tiene densidad 0.
- Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de cuadrados, entonces $s^{-1}(\mathcal{A})$ tiene densidad 0.

Refutando una conjetura EGPS más fuerte

EGPS indican que su conjetura sería una consecuencia de la siguiente afirmación.

Conjetura (Erdős, Granville, Pomerance, Spiro, 1990)

Para cada entero positivo θ existe una constante C_θ tal que para cada entero positivo m existen a lo más C_θ números $n \leq \theta m$ con $s(n) = m$.

Bosquejo de prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Refutamos la conjetura EGPS más fuerte, mostrando que hay enteros m con un número arbitrariamente grande de preimágenes de la forma $2pq$.

Bosquejo de prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Refutamos la conjetura EGPS más fuerte, mostrando que hay enteros m con un número arbitrariamente grande de preimágenes de la forma $2pq$.

Observamos que $s(2pq) = (p+3)(q+3) - 6$.

Bosquejo de prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Refutamos la conjetura EGPS más fuerte, mostrando que hay enteros m con un número arbitrariamente grande de preimágenes de la forma $2pq$.

Observamos que $s(2pq) = (p+3)(q+3) - 6$.

Por una construcción de Erdős/Prachar, hay un número infinito de enteros con un número arbitrariamente grande de representaciones de esta forma.

Bosquejo de prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Refutamos la conjetura EGPS más fuerte, mostrando que hay enteros m con un número arbitrariamente grande de preimágenes de la forma $2pq$.

Observamos que $s(2pq) = (p+3)(q+3) - 6$.

Por una construcción de Erdős/Prachar, hay un número infinito de enteros con un número arbitrariamente grande de representaciones de esta forma.

Nota: $m = s(2pq) \geq pq$, por lo que cada preimagen $2pq$ de m es $\leq 2m$.

Bosquejo de prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Refutamos la conjetura EGPS más fuerte, mostrando que hay enteros m con un número arbitrariamente grande de preimágenes de la forma $2pq$.

Observamos que $s(2pq) = (p+3)(q+3) - 6$.

Por una construcción de Erdős/Prachar, hay un número infinito de enteros con un número arbitrariamente grande de representaciones de esta forma.

Nota: $m = s(2pq) \geq pq$, por lo que cada preimagen $2pq$ de m es $\leq 2m$.

Así, la conjetura fuerte falla para $\theta = 2$.

Refutando una conjetura EGPS más fuerte

Usando una elaboración sobre estos métodos, mostramos:

Teorema (Pollack, Pomerance, T., 2018)

Existe una constante $c > 0$ tal que lo siguiente es cierto. Sean α y ϵ números reales positivos. Hay un número infinito de m con por lo menos $\exp(c \log m / \log\log m)$ s-preimagenes en el intervalo $(\alpha(1-\epsilon)m, \alpha(1+\epsilon)m)$.

Lema Clave

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Usamos la siguente generalización de Erdős-Prachar:

Lema (Pollack, Pomerance, T., 2018)

Hay una constante absoluta positiva c tal que, para $a, b \in \mathbb{Z}$ cualesquiera con $a \neq 0$ y $b > 0$, hay un número infinito de enteros k con más que $\exp(c \log k / \log\log k)$ representaciones de la forma $(bp + a)(bq + a)$ con p, q primos.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Sea $0 < \epsilon < 1$. Es concido que los valores de $s(n)/n$ son densos en $(0, \infty)$.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Sea $0 < \epsilon < 1$. Es concido que los valores de $s(n)/n$ son densos en $(0, \infty)$.

Por lo tanto, podemos fijar $n_0 > 1$ con

$$s(n_0)/n_0 \in \left(\alpha^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right), \alpha^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon\right)\right).$$

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Sea $0 < \epsilon < 1$. Es concido que los valores de $s(n)/n$ son densos en $(0, \infty)$.

Por lo tanto, podemos fijar $n_0 > 1$ con

$$s(n_0)/n_0 \in \left(\alpha^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right), \alpha^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon\right)\right).$$

Escribimos $n = n_0 pq$, donde p, q son primos distintos que no dividen a n_0.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Sea $0 < \epsilon < 1$. Es concido que los valores de $s(n)/n$ son densos en $(0, \infty)$.

Por lo tanto, podemos fijar $n_0 > 1$ con

$$s(n_0)/n_0 \in \left(\alpha^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right), \alpha^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon\right)\right).$$

Escribimos $n = n_0pq$, donde p, q son primos distintos que no dividen a n_0. Entonces

$$\begin{aligned} s(n_0pq) &= \sigma(n_0)(p+1)(q+1) - n_0pq \\ &= s(n_0)pq + \sigma(n_0)(p+q+1), \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} s(n_0)s(n_0pq) = &(s(n_0)p + \sigma(n_0))(s(n_0)q + \sigma(n_0)) \\ &+ s(n_0)\sigma(n_0) - \sigma(n_0)^2. \end{aligned}$$

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Por el lema clave, hay un número infinito de $k \in \mathbb{Z}$ con más de $\exp(c \log k / \log\log k)$ representaciones de la forma

$$k = (s(n_0)p + \sigma(n_0))(s(n_0)q + \sigma(n_0))$$

con p, q distintos.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Por el lema clave, hay un número infinito de $k \in \mathbb{Z}$ con más de $\exp(c \log k / \log\log k)$ representaciones de la forma

$$k = (s(n_0)p + \sigma(n_0))(s(n_0)q + \sigma(n_0))$$

con p, q distintos.

Definimos

$$m = \frac{k + s(n_0)\sigma(n_0) - \sigma(n_0)^2}{s(n_0)}.$$

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Por el lema clave, hay un número infinito de $k \in \mathbb{Z}$ con más de $\exp(c \log k / \log\log k)$ representaciones de la forma

$$k = (s(n_0)p + \sigma(n_0))(s(n_0)q + \sigma(n_0))$$

con p, q distintos.

Definimos

$$m = \frac{k + s(n_0)\sigma(n_0) - \sigma(n_0)^2}{s(n_0)}.$$

Entonces $m < k$ y m tiene por lo menos $\exp(c \log m / \log\log m)$ representaciones en la forma $s(n_0pq)$.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Por el lema clave, hay un número infinito de $k \in \mathbb{Z}$ con más de $\exp(c \log k / \log\log k)$ representaciones de la forma

$$k = (s(n_0)p + \sigma(n_0))(s(n_0)q + \sigma(n_0))$$

con p, q distintos.

Definimos

$$m = \frac{k + s(n_0)\sigma(n_0) - \sigma(n_0)^2}{s(n_0)}.$$

Entonces $m < k$ y m tiene por lo menos $\exp(c \log m / \log\log m)$ representaciones en la forma $s(n_0pq)$.

Es fácil mostrar que $(1-\epsilon)\alpha m < n_0pq < (1+\epsilon)\alpha m)$.

Bosquejo de la prueba

Sumas de divisores
Lola Thompson
Introducción
Interlude
La imagen de s
La preimagen de s
La conjetura EGPS
Progreso parcial en EGPS
Una conjetura EGPS más fuerte?

Por el lema clave, hay un número infinito de $k \in \mathbb{Z}$ con más de $\exp(c \log k / \log\log k)$ representaciones de la forma

$$k = (s(n_0)p + \sigma(n_0))(s(n_0)q + \sigma(n_0))$$

con p, q distintos.

Definimos

$$m = \frac{k + s(n_0)\sigma(n_0) - \sigma(n_0)^2}{s(n_0)}.$$

Entonces $m < k$ y m tiene por lo menos $\exp(c \log m / \log\log m)$ representaciones en la forma $s(n_0pq)$.

Es fácil mostrar que $(1-\epsilon)\alpha m < n_0pq < (1+\epsilon)\alpha m)$.

Así, m tiene por lo menos $\exp(c \log m / \log\log m)$ preimágenes $n = n_0pq$ en $((1-\epsilon)\alpha m, (1+\epsilon)\alpha m)$.

Sumas de divisores

Lola Thompson

Introducción

Interlude

La imagen de s

La preimagen de s

La conjetura EGPS

Progreso parcial en EGPS

Una conjetura EGPS más fuerte?

¡Gracias!